第19講　等比数列，等差中項と等比中項

§1 等比数列

要点整理 と 公式

要点1 等比数列

1 に次々に 2 を掛けると，次の数列が得られる。

1，2，4，8，16，……

このように，初項 a に一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を「　　　　　」といい，一定の数 r をその等比数列の「　　　」という。

（ex）初項 2，公比 3 の等比数列は

初項 3，公比 -2 の等比数列は

要点2 等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について

$a_1 = a$

$a_2 = a_1 \times r = ar$

$a_3 = a_2 \times r = ar \times r = ar^2$

$a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3$

………

と表されるから，第 n 項は

$a_n = ar^{n-1}$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ **等比数列の一般項**

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

(ex) 初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n =$　・

初項 2，公比 -3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n =$　・

※等比数列 $\{a_n\}$ において，次の関係が成り立つ。

$a_{n+1} = ra_n$　　とくに $\{a_n\}$ の各項が 0 にならないときは　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　初項 2，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 6 項を求めよ。

［2］　次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求め，一般項を求めよ。

（1）　$48,\ 12,\ 3,\ \dfrac{3}{4},\cdots\cdots$　　　（2）　$2,\ -10,\ 50,\ -250\cdots\cdots$

Point Pickup

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列の公比 r は，隣り合う 2 項の「比」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 等比数列の一般項

要点整理 と 公式

要点3 与えられた2項から等比数列の一般項を求める

第3項が -12，第5項が -48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

初項を　，公比を　とすると，等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n =$

と表される。

$a_3 = -12$ より　　　　　　……①

$a_5 = -48$ より　　　　　　……②

②　①より　　　　　　$r^2 = 4$　　よって　$r =$

$r = 2$ のとき，①より　$4a = -12$　　$a = -3$

よって　$a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

$r = -2$ のとき，①より　$4a = -12$　　$a = -3$

よって　$a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

したがって，求める一般項は　$a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$　または $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

(1)　第 4 項が 81，第 6 項が 729 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　第 2 項が 48，第 5 項が -6 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
ただし，公比は実数とする。

Point Pickup

等比数列の一般項

等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項を a，公比を r とおくと

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表される。

a，r を求めるためには，与えられた項の条件から，a，r についての連立方程式を立てて解く。

この連立方程式は，2 式を辺々割る（または一方の式をもう一方の式に代入する）ことで解くことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 等比数列の和

要点整理 と 公式

要点4 等比数列の和

初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S = 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。

この両辺に公比 3 を掛けると

$$3S = 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^5 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。①－②より

$$\begin{array}{rl} S = & 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 \\ -)\ 3S = & \qquad 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^5 \\ \hline S - 3S = & 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\cdot 3^5 \end{array}$$

$$(1-3)S = 2(1-3^5)$$

よって　$S = \dfrac{2(1-3^5)}{1-3}$　$\cdots\cdots ③$

$$= 242$$

③の式から，等比数列の和 S は次のように表される。

$$S = \frac{初項\times\{1-(公比)^n\}}{1-公比}$$

また，②－①より　$(3-1)S = 2(3^5-1)$　　よって　$S = \dfrac{2(3^5-1)}{3-1}$　$\cdots\cdots ④$

④の式から，等比数列の和 S は次のように表される。

$$S = \frac{初項\times\{(公比)^n-1\}}{公比-1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ 等比数列の和 その①

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

初項 2，公比 1 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S は

$$
\begin{aligned}
S &= 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1^4 \\
&= \\
&= 5 \times 2 \quad \cdots\cdots ⑤ \\
&= 10
\end{aligned}
$$

である。

⑤の式から，公比が 1 の等比数列の和 S は次のように表される。

$S =$ 項数 × 初項

よって，次のことが成り立つ。

■ 等比数列の和 その②

初項 a，公比 1，項数 n の等比数列の和 S_n は

$S_n = na$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　初項 5，公比 2，項数 6 の等比数列の和 S を求めよ。

(2)　初項 8，公比 -3，項数 5 の等比数列の和 S を求めよ。

(3)　初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

Point Pickup

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$ のとき　$S_n = na$

とくに，

$r > 1$ のとき（公比が 1 より大きいとき）は　$S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r < 1$ のとき（公比がマイナス，または 0 から 1 の間のとき）は

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

を使うと，分母がプラスとなり計算が楽になる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 等差中項と等比中項

要点整理 と 公式

要点 5 等差中項の性質

数列 a，b，c が等差数列のとき，隣り合う 2 項の「　　　」が等しいので，

$$b - a = c - b$$

よって　$2b = a + c$　が成り立つ。

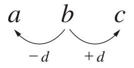
また，逆に $2b = a + c$ ならば，$b - a = c - b$　より，数列 a，b，c は等差数列である。

よって，以下のことがいえる。

■ 等差中項の性質

数列 a，b，c が等差数列 $\iff$ $2b = a + c$

また，数列 a，b，c が公差 d の等差数列であるとき，



$a = b - d$　かつ　$c = b + d$

この 2 式を辺々足すと　$a + c = 2b$　となり，上記の性質が確認できる。

数列 a，b，c が等差数列のとき，b を「等差中項」という。

要点 6 等比中項の性質

数列 a，b，c が等比数列のとき，隣り合う 2 項の「　　　」が等しいので，

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

よって $b^2 = ac$　が成り立つ。

また，逆に $b^2 = ac$ ならば，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$　より，数列 a，b，c は等比数列である。

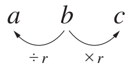
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，以下のことがいえる。

■ 等比中項の性質

数列 a，b，c が等比数列　$\Longleftrightarrow$　$b^2 = ac$

また，数列 a，b，c が公比 r の等比数列であるとき，



$a = \dfrac{b}{r}$　かつ　$c = br$

この 2 式を辺々掛けると　$ac = b^2$　となり，上記の性質が確認できる。

数列 a，b，c が等比数列のとき，b を「等比中項」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　3, x, 15, ……　が等差数列であるとき, x の値を求めよ。

(2)　3, x, 48, ……　が等比数列であるとき, x の値を求めよ。

Point Pickup

等差中項・等比中項の性質

数列 a, b, c が等差数列　$\Longleftrightarrow$　$2b = a + c$

数列 a, b, c が等比数列　$\Longleftrightarrow$　$b^2 = ac$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　確認テスト

1 等比数列 $\{a_n\}$ が 2，6，18，54，…… で与えられるとき，その初項は $a=$ [ア]，公比は $r=$ [イ] である。また，一般項は $a_n=$ [ウ]・[エ]$^{n-1}$ である。

2 第 2 項が 6，第 4 項が 54 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ [オ]・[カ]$^{n-1}$
または $a_n=$ [キク]・([ケコ])$^{n-1}$ である。

3 初項 4，公比 2，項数 7 の等比数列の和は [サシス] である。
また，初項 6，公比 −2，項数 4 の等比数列の和は [セソタ] である。

4 数列 3，x，17 が等差数列のとき，$x=$ [チツ] である。
また，数列 2，x，18 が等比数列のとき，$x=$ [テト]，[ナ] である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　等比数列，等差中項と等比中項

1

［1］ $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

第 6 項は　$a_6 = 2^6 = 64$

［2］（1） 初項は　$a = 48$　　公比は　$r = 12 \div 48 = \dfrac{1}{4}$

一般項は　$a_n = 48 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

（2） 初項は　$a = 2$　　公比は　$r = (-10) \div 2 = -5$

一般項は　$a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$

2

（1） 初項を a，公比を r とすると，

$a_n = ar^{n-1}$

$a_4 = 81$　より　$ar^3 = 81$　……①

$a_6 = 729$　より　$ar^5 = 729$　……②

②÷①より　$\dfrac{ar^5}{ar^3} = \dfrac{729}{81}$　　$r^2 = 9$　　よって　$r = \pm 3$

$r = 3$ のとき　①より $a = 3$

よって　$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$r = -3$ のとき ①より $a = -3$

よって　$a_n = -3 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^n$

したがって，求める一般項は　$a_n = 3^n$　または　$a_n = (-3)^n$

（2） 初項を a，公比を r とすると，

$a_n = ar^{n-1}$

$a_2 = 48$　より　$ar = 48$　……①

$a_5 = -6$　より　$ar^4 = -6$　……②

②÷①より　$\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{-6}{48}$　　$r^3 = -\dfrac{1}{8}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

公比は実数より　$r = -\dfrac{1}{2}$　　このとき ①より $-\dfrac{1}{2}a = 48$　　$a = -96$

したがって，求める一般項は　$a_n = -96 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

3

(1)　$S = \dfrac{5(2^6 - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot 63 = 315$

(2)　$S = \dfrac{8\{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = \dfrac{8 \cdot 244}{4} = 488$

(3)　$S_n = \dfrac{1\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

4

(1)　等差数列は隣り合う 2 項の差が等しいので

$x - 3 = 15 - x$

よって　$x = 9$

(別解)

等差中項の性質より　$2x = 3 + 15$　　よって　$x = 9$

(2)　等比数列は隣り合う 2 項の比が等しいので

$\dfrac{x}{3} = \dfrac{48}{x}$　　$x^2 = 144$　　よって　$x = \pm 12$

(別解)

等比中項の性質より　$x^2 = 3 \cdot 48$　　$x^2 = 144$　　よって $x = \pm 12$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　確認テスト

1 等比数列 $\{a_n\}$ が 2, 6, 18, 54, …… で与えられるとき，その初項は $a =$ [ア]，公比は $r =$ [イ] である。また，一般項は $a_n =$ [ウ]・[エ]$^{n-1}$ である。

2 第 2 項が 6，第 4 項が 54 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [オ]・[カ]$^{n-1}$ または $a_n =$ [キク]・([ケコ])$^{n-1}$ である。

3 初項 4，公比 2，項数 7 の等比数列の和は [サシス] である。
また，初項 6，公比 −2，項数 4 の等比数列の和は [セソタ] である。

4 数列 3，x，17 が等差数列のとき，$x =$ [チツ] である。
また，数列 2，x，18 が等比数列のとき，$x =$ [テト]，[ナ] である。

{ 解答 }

1	ア 2	イ 3	ウ 2	エ 3		
2	オ 2	カ 3	キ −	ク 2	ケ −	コ 3
3	サ 5	シ 0	ス 8	セ −	ソ 3	タ 0
4	チ 1	ツ 0	テ −	ト 6	ナ 6	

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。